تعديل معالم دالة الحياة لتقديرات أكثر دقة في حالة التنبؤ المستقبلي بجداول الحياة.

د/ محمود سالم
استاذ بقسم الاحصاء والرياضة والتأمين
كلية التجارة – جامعة كفر الشيخ

مصطفي يسري البحيري
معيد بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
تجارة اسماعيلية – جامعة قناة السويس

مصطلحات: دالة الحياة، الجداول الاكتوارية، معدل الحياة، التحسن الصحي، تكلفة التأمين.

ملخص

دالة الحياة تصور سلوك ظاهرة انتهاء الحياة عن طريق الموت لمجموعة من الأفراد لآخر باقي في المجموعة. وتستخدم هذه الدالة في تقديرات معدلات الوفيات المختلفة وعدد الباقين علي قيد الحياة لآخر عمر في الجدول وكذلك في اعداد جداول اكتوارية تستخدم في تقدير تكلفة المنتجات المختلفة لتأمينات الحياة. ولأن درجة دقة التقديرات يعتبر امرا حيويا في هذا المجال، ولذلك يفضل استخدام دالة حياة تم تعديلها – مما يؤدي الي زيادة درجة دقة النتائج المقدرة بواسطتها– في تقديرات تكلفة التأمين مما يحقق هدفا اساسيا للنظام الاكتواري وهو العدالة التأمينية بين طرفي عقد التأمين.

أولا: – مقدمة

تعتبر جداول الوفيات أداة هامة يسعى إليها الإكتواريون وجميع المهتمين بتأمينات الحياة لأنه الأساس الفني للحسابات الاكتوارية مثل تقدير الأقساط والاحتياطيات الفنية المختلفة وتساعد من ناحية أخري في وضع السياسات التأمينية الخاصة بعمليات الاكتتاب وإعادة التأمين. وتتكون عملية اعداد جداول الوفيات بمرحلتين: الأولى تهدف الي تحديد البيانات الخاصة ومصدرها وطريقة حساب القيم المعرضة للخطر وعدد الوفيات ومدد الملاحظة .. إلى آخره. وذلك للوصول إلى معدلات الوفاة الخام. المرحلة الثانية وتتمثل في تمهيد البيانات الخام والمعدلات وتدرجها لتخليصها من عدم الانتظامية الناتجة من طبيعة البيانات واخطاء المعاينة. والبيانات الممثلة لعدد الوفيات (d_x) ومعدلات الوفاة تعتبر اساس هيكل جداول الوفيات، فإذا توافرت بيانات خبرة كافية عن عدد الوفيات مع الرقم الأساسي لعينة الدراسة أمكن – بخطوات تقليدية – استكمال باقي اعمدة جدول الحياة الوفيات.

والجدير بالذكر أن معظم بيانات خبرة الوفيات العملية هي في حقيقتها عينات مختارة عشوائيا من المجتمعات محل الدراسة، لذلك فإن معدلات الوفاة عند الأعمار المختلفة والمحسوبة من

بيانات تلك الخبرة عادة ما تكون معرضة لأخطاء المعاينة الاحصائية الخاصة بإختيار العينات العشوائية بالاضافة الي الصعوبات التي تنتج من تأثير المراحل السنية لمفردات العينة علي استواء منحني دالة الحياة. وبناء علي تلك الصعوبة تقسم البيانات الي مجموعات خاصة بالمراحل السنية المتقاربة بحيث تكون مجموعة بيانات ممثلة لمرحلة سنية تنتظمها دالة حياة لها معالمها الخاصة، ولتكوين دالة حياة واحدة تمثل المجتمع منذ الميلاد الي اقصي عمر يمكن ان يعيشة الفرد في نفس المجتمع (ϖ) تتم بما يعرف بتدريج البيانات Graduation data وتهدف الي تمهيد نقاط الاتصال بين اطراف فئات العمر في الجدول. ان إعداد جدول بهذه الطريقة يحتاج وقتا وجهدا وتكلفة عالية كما تحتاج الي تكنيات وخبرات ذات مستوي معين قد لا تتوافر في معظم دول العالم ومن ثم فان عملية انشاء جدول حياة (وفيات) لا تتم كل سنة وانما تتم علي فترات دورية طويلة وصلت في المتوسط الي عشرين سنة في النصف الأول من القرن العشرين بينما انخفض طول الفترة في النصف الثاني من نفس القرن الي عشر سنوات.

بناء علي الوضع السابق فان شركات التأمين كانت وما زالت تصدر وثائق تأمينات الحياة بأقساط واحتياطيات فنية بناء علي بيانات خبرة مضي علي وقت طويل. ومن ناحية أخري فان التطور الصحي والبيئي يؤدي – بالدليل القاطع – الي انخفاض معدلات الوفاة ومن ثم ارتفاع معدلات الحياة ومن ثم فان الوثائق التي تصدرا شركات التأمين معتمدة علي بيانات خبرة مضي عليها وقتا طويلا تواجه مشكلة عدم العدالة بين اطراف عقد التأمين وهذا بدور يمثل تحديا امام اي نشاط يهدف الي تطوير منتجات تأمينات الحياة. هذا التحدي معروف لدي الأكاديمين وفي اسواق التأمين بخطر طول العمر [32.1] Longevity risk.

خلال العقدين الأخيرين، استجاب الباحثون والمسئولون عن اسواق التأمين – بصورة جزئية – لضغط الهيئات الرقابية وشكاوي حملة الوثائق باصدار انواع جديدة من منتجات تأمينات الحياة تشترك جميعها في خاصية إشتراك حامل الوثيقة في الأرباح المحققة في نهاية العام، مع القناعة التامة بان مبرر الاستراك في الأرباح وان معظم مكاسب شركات التأمين ناتج عن الفروق بين معدلات الوفاة المقدرة والفعلية، وكذلك الفروق بين معدلات العائد من استثمار اموال حملة الوثائق والمعدل الفني المستخدم في حسابات القيمة الحالية لمبالغ التأمين.

ثانيا:- المشـــكلة

تعتبر عملية تقدير تكلفة وثائق تأمينات الحياة طبقا للنظام الاكتواري عملية ليست صعبة طاما توافر لها بيانات الخبرة الممثلة للمجتمع في شكل جداول الوفيات (الحياة) ولكن المشكلة تكمن اساسا في طريقة اعداد تلك الجداول وتكلفتها من حيث الوقت والجهد والمال. كما أن طبيعة

البيانات المقدرة من بيانات خبرة قديمة لا تمثل الواق ولو نسبيا يعتبر اساس مشكلة هامة. ويمكن تلخيص المشكلة التي يعالجها البحث في الآتي:

1. لا تتوافر بيانات خبرة حديثة وكافية في مصر ومعظم دول العالم تمثل ناتج عمليات شركات تأمينات الحياة في تلك البلاد.
2. اعتماد شركات تأمينات الحياة علي بيانات تقديرية مضي عليها مدة طويلة أدي الي فروق جوهرية بين التزامات طرفي عقد التأمين وهذا لا يحقق شرطي العدالة والكفاية اللازمين في قسط التأمين.
3. لا تستخدم شركات التأمين خاصة في السوق المصرية دوالا رياضية لتعديل الأسعار كي تتناسب مع تأثير التحسن.

ثالثا:- هـدف الدراسـة

ان علاج المشكلة الأساسية السابق الاشارة اليها يكون في توفير بيانات محدثة بناء علي بيانات خبرة فعلية وبصورة مستمرة، وفي هذا الاطار يمكن استخدام التغير في معدلات الحياة لمراحل العمر المختلفة علي مدار السنوات المنقضية والناتج من التحسن الصحي والبيئي في التوصل الي بيانات تكون اقرب ما يمكن الي البيانات الفعلية. وحينئذ يكون هدف الدراسة التوصل الي شكل جديد لدالة الحياة يمكن استخدامها في تحديث البيانات اعتمادا علي بيانات الخبرة الماضية.

والجدير بالذكر ان العديد من الرياضيين والخبراء الاكتواريين عالجوا دالة الحياة، وكل منهم اضاف جديدا الي ما سبقه في ناحية من النواحي. فقد اقترح Abraham De Moivre [20, 26] سنة 1724 دالة خطية لتمثيل دالة الباقين علي قيد الحياة (l_x) بالصيغة الآتية.

$$L_x = l_o \left(1 - \frac{x}{86}\right)$$

وفي عام 1825 استعمل بنجامين جوميرتز Benjamin Gompertz [27,26] ، [299,15] أسس فسيولوجية لتبيان وطأة الوفاة Intensity of Mortality علي اساس انها متوسط استهلاك قوة الإنسان في مقاومة الوفاة، وقد اعتبر معدل الوفاة اللحظي μ_x تعبيرا عن تلك القيمة ولذلك اقترح في صياغة ذلك الدالة الآتية.

$$\mu_x = B\,C^x$$

وفي عام 1860 أقر ماكيهام Makeham [22,26] ، [299,15] ما سبق أن جاء به جومبيرتز حيث امكن تقسيم أسباب الوفاة إلى سببين الأول السبب الطبيعي للوفاة والثاني سبب التزايد الأسى في معدلات الوفاة، لذا كتب ماكيهام معادلة معدل الوفاة اللحظي على الصورة :

$\mu_\chi = A + B\,C^X$; A, B, C are constants

وفي عام 1872 كون Thiele [36, 15] الصورة التالية لمعدل الوفاة اللحظي:

$\mu_\chi = a_1 \exp[-b_1\chi] + a_2 \exp[-Y_2\, b_s\, (\chi - C)^2] + a_3 \exp[b_3\chi]$;

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c$ are constants

في عام 1932 صاغ Perks [305,15] عائلة من المنحنيات لإستعمالها في تسوية بيانات جدول الحياة بالشكل التالي:

$$\mu_\chi = \frac{A + BC^X}{KC^{-X} + 1 + DC^X}; \text{ A, B, C, K, D are constants}$$

وحاول Carl Person [37 ،37] تمثيل البيانات الحيوية عن السكان باستخدام عدد من المنحنيات المتداخلة الممثلة لمراحل العمر المختلفة للتوصل الي عدد الوفيات ومعدل الوفاة اللحظي (d_χ, μ_χ). ودرس Phillips عام 1935 منحنيات لتمثيل عدد الوفيات بدلاً من معدل الوفاة اللحظي [37, 15]. ثم قام Barnett [14] 1970 بإدخال بعض التعديلات على دالة Perks لتكون بالصورة الآتية.

$$l_X = \frac{a - H_X + BC^X}{1 + a - H_X + BC^X}$$

في 1980 اقترح Heligman and Pollard دالة جديدة لمعالجة بيانات معدلات الحياة في مراحل عمرية مختلفة تطبيقا علي الوفيات الأسترالية. وفي عام 1988 قام ForFar, McCatchen, Wilkie [20] بتقديم دراسة في تسوية وتحسين معدلات الوفاة بالطرق الرياضية تناول فيها طرق Gompertz and Makeham وأيضا صيغه Barnet [15, 20]. وكانت صيغته كما يلي:

$q_\chi / p_\chi = A + H_X + BC^X$

وفي [1993] طور Heligman and Pollard دالتهم السابقة [14] بهدف جذب الانتباه الي ظاهرة ضغط الوفيات Compression of Mortality والتي تعتبر اداة للتركيز علي خطر طول العمر. وتناول Faries في عام [1980] ظاهرة طول العمر والتي تعبر بشكل صريح عن خطر طول العمر Longevity Risk. في عام (1994) قدم Jacaues Carriere [25] دالة عبارة عن مزيج بين عدة دوال Compertz, Inverse Comports, Waybill, Inverse Waybill. وفي عام [2005] اقترح Bongarts [17] دالة حياة عبارة عن مزيج بين دالة Logistic model Gompartz وصيغتها كما يلي:

$\mu_\chi = a\, e^{-BX} .\, e^{-\lambda t}$; a, B parameters, and λ change rate based on time t

عام (2010) Roger thatcher, SiucheungK chiro Horiunch and Robine قدم دراسة بعنوان : "The compression of death above the mode" حيث استخدموا simple Logistic model two parameters لدراسة مرحلة ضغط الوفيات لكبار السن فوق المنوال. وتوصلوا ايضاً إلى أن التوزيع الاحتمالي لسن الوفاة سيتحول إلى اليمين من دون تغير في الشكل وهذا يسمى نموذج التحول اللوجيستي shifting logistic model.

قام Jack Cyue (2011) بدراسة بعنوان: "Mortality Compression & Longevity" حيث استخدم البيانات الخام بدلاً من البيانات الممهدة لثلاثة دول (اليابان ، السويد ، الولايات المتحدة) واستخدم مقاس Cheung ثلاثي الأبعاد لقياس ظاهرة طول العمر وقام بتطوير هذا النموذج، وتوصل إلى مقياس خماسي الأبعاد مكون من المقاس الأول والثاني والثالث لـ Cheung والرابع التباين لتوزيع العمر والخامس احتمالات البقاء بعد السن الكبير ويستخدم في تقييم حد الحياه ومعرفة ما إذا كان التوزيع العمري للوفيات يتناسب مع التوزيع الطبيعي أم لا ، وقد توصل ايضاً إلى أن متوسط العمر المتوقع في تزايد مستمر حيث أن منحنى البقاء من المرجح أن ينتقل إلى اليمين مرة أخرى .

يتضح مما سبق ان معظم الدراسات السابقة تناولت تسوية معدلات الوفاة الفعلية ودراسة ظاهرة طول العمر والعمل على جداول الوفيات المعدة سابقا بناء دوال حياة ذات معالم متعددة مما تحتاج الى مجهود كبير للتنبؤ بقيم معالمها ولم تتناول الدراسات السابقة مفهوم التنبؤ باستخدام تقديرات معالم دالة الحياة لقياس اثر التحسنات الصحية والبيئية وهو ما يتم من خلال هذه الدراسة.

رابعا:– دالة الحياة لجومبيرتز: Gompertz' Formula

في دراسة [21,26],[299,15] Benjamin Compertz لإختبار تأثير الفرض الخاص بأن متوسط التدهور في مقدرة الإنسان على مقاومة الوفاة يتناقص بمعدل يتناسب مع تناقص الباقي من عمر الانسان، وقد اعتبر معدل الوفاة اللحظي μ_χ مقياسا لمعدل الوفاة واستخدم مقلوب المعدل اللحظي $[\mu_\chi]^{-1}$ لقياس مقدرة الإنسان على مقاومة الوفاة وصاغ فرضه رياضياً بالشكل الآتي:

$$\frac{d}{d_x}[\mu_\chi]^{-1} = -j.\,[\mu_\chi]^{-1};$$

حيث (J) ثابت التناسب، $[\mu_\chi]^{-1}$ مقياس لقيمة مقاومة الانسان للوفاة.

وقد توصل جومبيرتز الي دالة أسية لقياس معدل الوفاة اللحظي بالشكا الآتي $\mu_\chi = Bc^x$ ، بينما توصل الي قانون معدل الحياة المحقق لفرضية جومبرتز السابقة والمشتق من دالة معدل الوفاة الحظي فكانت صيغته كما يلي:

$$P_x = \exp \left[\frac{B\,(c-1)}{L_n\, c} * c^x \right]$$

بالاعتماد علي أسلوب هاردي لتسوية جداول الحياة لتقدير معالم دالة جومبرتز لاستخدامها في التنبؤ بمعالم الدالة [B,C][15] نبدأ بالتعامل مع دالة P_x السابقة حيث يتم اشتقاق الدالة لنصل الي الصورة [$-\ln\ (-\ln P_x)$] والتي يمثلها خط مستقيم، ويمكن التنبؤ بقيمة [B,C] [300, 15] كما يلي:

$$-\text{Ln}\ c = \text{slope, then } c = \exp\ [-\text{slope}]$$

$$B = \frac{\text{Exp}\ [-y.\ \ln c]}{c^x * (c-1)}$$

للتأكد من دقة التقدير قام Scollnik , David [33] بإعداد حدود عليا ودنيا لكل من قيمتي[B, c] حيث كانت كما يلي:

$$C = [1.06 < C < 1.12],\ B = [0.000001 < B < 0.001]$$

ويعتمد الباحث على معالم كل مرحلة عمرية لتقدير معدل تغير المعلمتين [B,C] مع التركيزعلي الفترة العمرية [60−65] باعتبارها نقطة الارتكاز بين الفترتين محل الدراسسة ولأهداف دقة البيانات في هذه الفترة يمكن التنبؤ بدرجة عالية من الدقة لقيم المعالم [B,C]. وقد اخذت الفترة الاخيرة [115− 100] ايضا في الاعتبار نظرا لأهميتها في دراسة خطر طول العمر.

عند تقدير قيم المعلمتين [B,C] وطبقا لحدود الدراسة المشار اليها أعلاه يتم استخدام معدلات الوفاة عند نقاط الارتكاز المرحلية($\mu_{30}, \mu_{60}, \mu_{65}, \mu_{100}, \mu_{115}$) واستخدام القيم التقديرية للمعالم للتنبؤ بمعدلات الوفاة للمراحل العمرية السابق الاشارة اليها لإستكمال بيانات جداول الحياة المختصرة ومن ثم تتوافر بيانات جداول وفيات ذات معدلات وفاة متوقعة وممهدة[1]. وباستخدام Software مناسب للتوصل للقيم المقدرة للمعلمتين [B,C] نحصل علي النتائج في الجداول الآتية:

جدول(1)
قيم معالم دالة جومبيرتز لعام 1980

[1] **- عند التطبيق يتم استخدام بيانات الجداول الأمريكية 1980, 1990, 2000, 2010 .**

age	p_x	c
0-30	0.98602	1.083405422
-60	0.99884	1.067181772
-65	0.99187	1.099475289
-70	0.98697	1.092766533
-100	0.97977	1.09499951

يتم تقدير قيمة المعلمة B ثم تقدير بيانات جدول الحياة لعام 1980وأهمها l_x, P_x وتكون النتائج كعينة من سنوات العمر كما يلي:

جدول(2)

بيانات جدول الوفيات 1980 ومعالم الدالة

age	C	B	$`p_x$	$`l_x$
30	1.067182	0.000126	0.999085	100000
31	1.067182	0.000128	0.999009	99908
63	1.099475	3.12E-05	0.987209	86642
64	1.099475	3.08E-05	0.98615	85534
117	1.095	2.27E-05	0.377885	1
118	1.095	2.25E-05	0.348428	0

اختبارات جودة التنبؤ بالبيانات

يمكن اختبار اقتراب معدلات الوفاة المتوقعة من معدلات الوفاة الفعلية (البيانات الواردة بالجداول 1980 – 1990 – 2000 – 2010) باستخدام ادوات الاختبار الآتية[2]:

1- اختبار χ^2

يتم اختبار جودة التقدير باستخدام اداة الاختبارالمعروفة χ^2 لبيانات الجداول 2010–2000–1990–1980 للأعمار المشار اليها.

جدول (3)

قيم المحسوبة بواسط χ^2

age	1980	1990	2000	2010
30	0.065661	0.059832	0.05864	0.061511
31	0.043957	0.041379	0.037923	0.042299
32	0.031988	0.032216	0.027619	0.029595
..	..	..	..	..
117	0.002591	0.003737	0.007814	0.040097
118	0.00071	0.000937	0.00229	0.01801
119	0.000123	0.000112	0.000397	0.007119

[2] - **الاختبارات تتم علي بيانات الأعمار من 30 الي آخر عمر في الجدول طبقا لحدود الدراسة.**

$\chi^2 =$	37.881075	40.565346	44.8800008	57.7670875

يتضح من قيم χ^2 المحسوبة قرين بيانات كل جداول انها أقل من القيمة الجدولية لها والتي تساوي 110 عند درجة معنوية 5% ودرجات حرية = 88 وهذا يدل علي انه لا توجد فروق جوهرية ذات دلالة احصائية بين القيم الفعلية والقيم المقدرة طبقا للدالة المستخدمة.

2 – اختبار الانحرافات الفردية المعيارية:

هذا الأسلوب يستخدم لإختبار اقتراب معدلات الوفاة المتوقعة من معدلات الوفاة الفعلية تحت نفس شروط الاختبار السابق وكانت نتيجة الاختبار أن بعض قيم الانحرافات الفردية المعيارية المحسوبة لمعدلات الوفاة المتوقعة ومعدلات الوفاة الفعلية خرجت عن حدود منطقة القبول (−2 : 2) مما يؤكد ان نموذج جومبرتز لايحقق دقة كاملة.

3 – اختبار الإشارة

هذا الاختبار يقوم علي اساس التوازن بين عدد الإشارات الموجبة والاشارات السالبة, ونحتاج لتنفيذ هذا الاختبار معرفة الانحرافات الفردية للقيم العادية لبيانات الجداول الفعلية وبيانات الجداول المقدرة مع تحديد قيم t كأداة اختبار. وكانت نتيجة الاختبار. كما في الجدول التالي:

جدول (4)

قيم المحسوبة لإختبار t

السنوات	1980	1990	2000	2010
قيم اختبار t	-2.74	-2.32	-2.74	-2.32

ولكي نقبل فرض العدم يجب ان تكون قيم t داخل حدودها عند درجة المعنوية المستخدمة. والنتائج السابقة تشير الي رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل وهو عدم وجود توازن بين عدد الاشارات الموجبة والسالبة للانحرافات الفردية بين المعدلات الفعلية والمعدلات المتوقعة بالدالة العادية.

4 – اختبار الانحرافات المتراكمة

يمكن استخدام اختبار الانحرافات المتراكمة والذي يختبر توزيع البيانات توزيعا طبيعيا من عدمه، ويقوم علي حساب الانحرافات المعيارية لمجموع الانحرافات بين القيم المقدرة والقيم الفعلية. ومعادلته كالآتي:

$$\frac{\sum (\theta_x - E_x.q_x)}{\sqrt{\sum (E_x.q_x.\ P_x)}}$$

وبتنفيذ الاختبار كانت النتائج الآتية

جدول (5)

قيم الانحرافات المتراكمة لدالة الحياة لجومبرتز

Year	1980	1990	2000	2010
$\dfrac{\sum (\theta_x - E_x.q_x)}{\sqrt{\sum (E_x.q_x.\ P_x)}}$	0.0003	0.0004	0.0006	0.0008

وطالما أن مجموع قيم الاختبار لا تخرج عن المدي 2± نقبل الفرض القائل بأن ان الانحرافات المتجمعة للاعمار لها توزيع طبيعى.

5- قياس أثر التحسن الصحي

أ - أثر التحسن الصحي على معدلات الحياة (P_x)

يتم تحديد أثر التحسن الصحي بقياس معدل تغير معدل الحياة (Px) كدالة في الزمن t وللمرحلة العمرية(x=30)، وبالاعتماد على بيانات جداول الحياة الامريكية الاكتوارية للسنوات من 1990 الي 2009 تكون معادلتي الاتجاه العام لقيم المعدلات الفعلية $\bar{Y}_O$ والمعدلات المقدرة $\bar{Y}_E$ كما يلي:

$$\bar{Y}_O = 0.000006\ x + 0.9864,\ r^2 = 0.9730$$

$$\bar{Y}_E = 0.000008\ x + 0.9823,\ r^2 = 0.9957$$

نسبة معامل الاتجاه العام لمعدلات الحياة المقدرة الي مثيله الخاص بمعدلات الحياة الفعلية = 133% ونسبة معامل التحديد لهما علي التوالي 102%.

ب - أثر التحسن الصحي على النقطة العمرية لظاهرة ضغط الوفيات.

يعتبر أثر التحسن الصحي على ظاهرة ضغط الوفيات من حيث علاقتها بعمر الانسان علي اساس انها دالة الحياة التي هي دالة في الزمن t من اهم القضايا التي يهتم بها الاكتواري لأن عندها ($P_x = q_x$) ويتغير معدل الاتجاه العام لمعدل الحياة من دالة خطية الي دالة اسية. وتقدر النقطة العمرية التي يحدث عندها ظاهرة ضغط الوفيات كما يلي:

$$X = \frac{\ln \left\{ \dfrac{\ln C}{B\,(c-1)} - [-\ln(-\ln P_x)] \right\}}{\ln C}$$

وبالتطبيق نحصل علي النتائج الآتية

جدول (6)

قيم (x) خلال الفترة 1980 : 2010 فترات عشرية.

YEAR	μ_x	C	B	X
1980	0.5	1.07149762	0.000251	114.26
1990	0.5	1.069449	0.00029	115.37
2000	0.5	1.067752	0.00033	116.17
2010	0.5	1.066331	0.000361	117.23

وهذا يعني أن التحسن الصحي يؤدي الي زيادة عمر الانسان في المتوسط بمقدار 0.099 سنة (حوالي 36 يوما) كل سنة.

خامسا:- النموذج المعدل لدالة الحياة.

من النتائج السابقة وجدنا اندالة الحياة لجومبيرتز تعطي نتائج دقيقة نسبيا وليست بدرجة عالية، وفي هذه الدراسة ندخل بعض التعديلات على معالم الدالة [B,C] بهدف اظهار أثر التحسن الصحي - مع مرور الزمن (t) - على تقديرات تلك الدالة

بنـــاء الـدالة

يتم بناء الدالة بتنفيذ خطوتين هما:

1- قياس التغير في معالم الدالة معا بناء علي التحسن الصحي علي مدار الزمن t. باستخدام بيانات جداول الحياة والوفاة الأمريكية لقياس التغير في [B,C] خلال الفترة الزمنية (t) لكل مرحلة عمرية (x). وبإعتبار ان:

$\left[{}_x\lambda_c , {}_x\lambda_B\right]$: ثوابت مرتبطة بمرحلة العمر.

λ : تمثل معدل التغير فى معالم الدالة $\left[B , C\right]$ معا والناتج من التحسن الصحى مع مرور الزمن (t).

${}_x\lambda_c$: يمثل معدل التغير في c بالنسبة للزمن t عند العمر x

${}_x\lambda_B$: يمثل معدل التغير في B بالنسبة للزمن t عند العمر x حيث

وبإدخال معدلات التغير (${}_x\lambda_c$ ، ${}_x\lambda_B$) على معالم الدالة [B,c] بهدف التنبؤ بالمعالم المستقبلية لها نصل الي أنه من الدالة الأساسية $\mu_x = BC^x$ يمكن اثبات أن.

$$c = exp\left[\frac{ln\left(\frac{\mu_{x_{HL}}}{\mu_{x_{LL}}}\right)}{\left(x_{HL} - x_{LL}\right)}\right];$$

x_{HL} : تمثل الحد الاعلى للفئة العمرية

x_{LL} : يمثل الحد الادنى لنفس الفئة العمرية

$\mu_{x_{HL}}$: يمثل معدل الوفاة للحد الاعلى للفئة عند (x_{HL})

$\mu_{x_{LL}}$: يمثل معدل الوفاة للحد الادنى للفئة عند (x_{LL})

And [3]

$B = exp\left[ln\,\mu_x - x\,ln\,c\right]$ And then

$$P_x = \exp\left[-\frac{\bar{B}(\bar{C}-1)}{\ln \bar{C}} * \bar{C}^x\right];$$

$$\bar{C} = {}_X\lambda_c^t\, C,\quad \bar{B} = {}_X\lambda_B^t\, B$$

وتكون الدالة المعدلة لتقدير معدل الوفاة اللحظي كالآتى :

$$\mu_x = \left[{}_x\lambda_B \,.\, \exp\left[\ln \mu_x - x\ \ln c\right]\right]\left[{}_x\lambda_c \,.\, \exp\left[\frac{\ln\left(\dfrac{\mu_{x_{HL}}}{\mu_{x_{LL}}}\right)}{(x_{HL} - x_{LL})}\right]\right]^x$$

سادسا:- تطبيق النموذج المعدل

نستخدم معدلات الوفاة المتاحة عند نقاط الارتكاز المرحلية (μ_{30}، μ_{60}، μ_{65}، μ_{100}، μ_{115}) لتقدير قيم معالم الدالة المقترحة [B,C] لكل مرحلة واستخدام القيم التقديرية لتلك المعالم للتنبؤ بمعدلات الوفاة للمراحل العمرية السابق الاشارة اليها, ثم إستكمال بيانات جدول الحياة المختصرة ومن ثم يتوافر لدينا جدول وفيات ذات معدلات وفاة متوقعة وممهدة. وبالتطبيق علي بيانات جداول الحياة الإكتوارية الأمريكية يمكن التوصل الي النتائج الآتية.

جدول (7)

قيم معالم الدالة المقترحة لعام 1980

age	P_x	C
0-30	0.99884	1.06706
- 60	0.99187	1.09893
- 65	0.98697	1.09197
- 70	0.97977	1.08985

---

[3] - ملحق رقم (1)

- 100	0.73267	1.04495

جدول(8)

بيانات جدول الوفيات 1980 ومعالم الدالة

age	C	B	$`p_x$	$`l_x$
30	1.06706	0.00016551	0.99884	100000
31	1.06706	0.00016551	0.998762214	99884
36	1.06706	0.00016551	0.998287682	99179
37	1.06706	0.00016551	0.998172858	99009
117	1.04495	3.291E-03	0.435450584	1
118	1.04495	3.291E-03	0.410071643	0

اختبارات جودة التنبؤ لبيانات ومعدلات جدول الحياة.

يمكن اختبار اقتراب معدلات الوفاة المتوقعة من معدلات الوفاة الفعلية (البيانات الواردة بالجداول 1980 – 1990 – 2000 – 2010) باستخدام ادوات الاختبار الآتية[4]:

1- اختبار χ^2

يتم اختبار جودة التقدير باستخدام اداة الاختبارالمعروفة χ^2 لبيانات الجداول -2000-2010 1980-1990 للأعمار المشار اليها.

جدول (9)

القيم المحسوبة بواسط χ^2

age	1980	1990	2000	2010
30	1.8533E-27	1.8796E-29	7.4399E-28	3.6301E-27
31	0.00093424	0.00076257	0.00117183	0.00101507
32	0.00212057	0.0015197	0.00249889	0.00289582
117	0.53195066	0.43527655	0.36110314	0.30453404
118	0.60040797	0.48577565	0.39896141	0.33380094
119	0.68782256	0.5490505	0.44568598	0.36953269
χ^2 =	7.30483593	6.21808936	5.36732849	4.70005148

يتضح من قيم χ^2 المحسوبة قرين بيانات كل جداول انها أقل من القيمة الجدولية لها والتي تساوي 110 عند درجة معنوية 5% ودرجات حرية = 88 وهذا يدل علي انه لا توجد فروق جوهرية ذات دلالة احصائية بين القيم الفعلية والقيم المقدرة طبقا للنموذج المقترح.

[4] - الاختبارات تتم علي بيانات الأعمار من 30 الي آخر عمر في الجدول طبقا لحدود الدراسة.

2 – اختبار الانحرافات الفردية المعيارية:

هذا الأسلوب يستخدم لإختبار اقتراب معدلات الوفاة المتوقعة من معدلات الوفاة الفعلية تحت نفس شروط الاختبار السابق وكانت نتيجة الاختبار أنه لا توجد اي من قيم الانحرافات الفردية المعيارية المحسوبة لمعدلات الوفاة المتوقعة ومعدلات الوفاة الفعلية خارج حدود منطقة القبول (2– : 2) مما يؤكد ان الدالة الجديدة تحقق نتائج ذات دقة اعلي من الدالة العادية.

3 – اختبار الإشارة

هذا الاختبار يقوم علي اساس التوازن بين عدد الإشارات الموجبة والاشارات السالبة كما اشير الي ذلك مسبقا. وكانت نتيجة الاختبار. كما في الجدول التالي:

جدول (10)

نتائج اختبار الاشارة للدالة المعدلة.

السنوات	1980	1990	2000	2010
قيم اختبارt	-1.34	-1.56	-1.34	-1.56

ونلاحظ أن قيم t جميعها داخل حدودها عند درجة معنوية 5%. والنتائج السابقة تشير الي قبول فرض العدم ودلالته وجود توازن مقبول بين عدد الإشارات الموجبة والاشارات السالبة لقيم الانحرافات.

4 – اختبار الانحرافات المتراكمة

يمكن استخدام اختبار الانحرافات المتراكمة والذي يختبر توزيع البيانات توزيعا طبيعيا من عدمه، وكانت نتيجة هذا الاختبار كما يلي:

جدول (11)

قيم الانحرافات المتراكمة للدالة المعدلة.

السنوات	1980	1990	2000	2010
الانحرافات المتراكمة	0.00006	0.00013	0.00028	0.00054

النتائج السابقة تثير الي أن مجموع قيم هذا المقدارً أقل من |2| وبالتالي نقبل فرض العدم وهو ان الانحرافات المتجمعة للاعمار تكون موزعة توزيعا طبيعيا.

مقارنة نتائج الاختبارات للدالة العادية والدالة المعدلة

1. اختبار χ^2

تتضح افضلية الدالة المعدلة علي الدالة العادية من بيانات الجدول الآتي:

جدول (12)

قيم الاختبار بالدالة العادية مقارنة بمثيلتها بالدالة المعدلة

السنوات	قيم χ^2 للدالة المعدلة	قيم χ^2 للدالة العادية	قيم χ^2 الجدولية
1980	7.3	37.9	110
1990	6.2	40.6	110
2000	5.4	44.9	110
2010	4.7	57.8	110

2 – اختبار الانحرافات الفردية المعيارية:

تتضح افضلية الدالة المعدلة علي الدالة العادية من أنه لا توجد اي من قيم الانحرافات الفردية المعيارية المحسوبة لمعدلات الوفاة المتوقعة ومعدلات الوفاة الفعلية خارج حدود منطقة القبول (‎−2 : 2‎) بالنسبة للدالة المعدلة بينما توجد بعض القيم خارج النطاق بالنسبة للدالة العادية.

3 – اختبار الإشارة

تتضح افضلية الدالة المعدلة علي الدالة العادية بمقارنة قيم اختبار t كما في الجدول التالي:

جدول (13)

قيم اختبار الاشارة بالدالة العادية مقارنة بمثيلتها بالدالة المعدلة

السنوات	قيم t للدالة المعدلة	**قيم t للدالة العادية**	قيم t الجدولية
1980	-1.34	-2.74	$\pm$ 1.96
1990	- 1.56	-2.32	$\pm$ 1.96
2000	-1.34	-2.74	$\pm$ 1.96
2010	-1.56	-2.32	$\pm$ 1.96

4 – اختبار الانحرافات المتراكمة

تتضح افضلية الدالة المعدلة علي الدالة العادية من أن مجموع قيم الانحرافات المتراكمة للدالة المعدلة اقل من مثيلتها للدالة العادية. والاثنين اقل من |2| كما يتضح من الجدول الآتي

جدول(14)

قيم اختبارالانحرافات المتراكمة للدالة المعدلة مقارنة بمثيلتها بالدالة المعدلة

السنوات	قيم الانحرافات المتراكمة للدالة المعدلة	قيم الانحرافات المتراكمة للدالة المعدلة
1980	o.00006	0.0003
1990	0.00013	0.0003
2000	0.00028	0.0003
2010	0.00028	0.0003
المجموع	0.00069	0.00120

سابعا:- أثر التحسن الصحي على معدلات وبيانات جدول الحياة باستخدام الدالة المعدلة.

أ - أثر التحسن الصحي على معدلات الحياة (P_X)

يتم تحديد أثر التحسن الصحي بقياس معدل تغير معدل الحياة (P_x) كدالة في الزمن t وللمرحلة العمرية(x=30)، وبالاعتماد على بيانات جداول الحياة الامريكية الاكتوارية للسنوات من 1990 الي 2009 تكون معادلتي الاتجاه العام لقيم المعدلات الفعلية $\bar{Y}_O$ والمعدلات المقدرة $\bar{Y}_E$ كما يلي:

$$\bar{Y}_O = 0.000006\ x + 0.9823,\ r^2 = 0.9957$$

$$\bar{Y}_E = 0.000008\ x + 0.9823,\ r^2 = 0.9957$$

نسبة معامل الاتجاه العام لمعدلات الحياة المقدرة الي مثيله الخاص بمعدلات الحياة الفعلية = 100% ونسبة معامل التحديد لهما علي التوالي 100%.

ب - أثر التحسن الصحي على بيانات جدول الحياة.

يقاس أثر التحسن الصحي على بيانات جدول الحياة مع مرور الزمن من خلال ثبات قيمة (P_x= 0.5) وقياس قيمة (x) مع مرور الزمن. ويمكن تحديد قيمة X من القانون :

$$\therefore\ X = \frac{\ln \mu_\chi - \ln B}{\ln C}$$

جدول (15)

قيم (x) خلال الفترة 1980 : 2010 فترات عشرية.

YEAR	µx	C	B	X
1980	0.5	1.0449543	0.003291	114.2388
1990	0.5	1.0451524	0.003076	115.2798
2000	0.5	1.0453438	0.002882	116.2709
2010	0.5	1.0455182	0.00271	117.2177

وهذا يعني أن التحسن الصحي يؤدي الي زيادة عمر الانسان في المتوسط بمقدار 0.0993 سنة (حوالي 36.24 يوما) كل سنة.

من هذه الدراسة تم التوصل إلى النتائج التالية: -

1- الدالة المعدلة تحقق نتائج اكثر دقة من الدالة العادية[5].

2- تاثير التحسن الصحى على معدلات الحياة (P_x) خلال الفترة الزمنية (t) واضح وبقيمة معنوية.

---

[5] - **ملحق رقم (2)**

3- تطوير بيانات جداول الحياة عملية ضرورية واجبة بصفة دورية.

4- تفيد الدالة المعدلة فى اختصار خطوات اعداد جداول الحياة المستقبلية.

ويوصي الباحثان بالآتي :

1- يفضل الاعتماد على النموذج المقترح فى بناء جداول الحياة الجديدة طالما انة يعطى نتائج اكثر دقة.

2- استخدام البيانات الناتجة من تطبيق النموذج المقترح فى تقدير تكلفة وثائق تامينات الحياة يحقق العدالة بين طرفى التامين.

3- يفتح النموذج الجديد باب البحث بهدف التدقيق فى بيانات خبرة شركات التامين فى المستقبل.

REFRENCE:

1. A, Kostaki (2000) "A Relational Technique for Estimation The age-Specific mortality pattern from grouped data" Mathematical Population Studies.
2. Behnke, H. (2000) " Insurance Mathematics: A European Model", University of Osnabruck.
3. Benjamin، B. and Pollard, J.H (1993) "The analysis of Mortality and other Actuarial Statistics ". Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, England.
4. **Bong arts J. (2005) "Long – Range Trends in adult mortality Models and projection Methods". Demographic Research VOL 42 (1), (23 – 49).**
5. Congregates، J. [2005] "Five Period Measures of Longevity" Demographic Research (13), [547 – 558].
6. Cheung, S.L.K, Robin, Tu, E.J. and Caselli, G (2005) "Three Dimensions of the survival Curve. Horizintalization , Virtualization and Longevity Extension source " Demography , VOL 42 (243 – 258)
7. Finkelstein , Maxim and Vaupal , James W. (2006) "The relative Tail of Longevity and The mean remaining Lifetime " Demographic Research VOL 14 (7) , (111 – 138)
8. For far, D.O., McCutcheon, J.J. and wilkie. A.D. (1988). "On Graduation by M" The mathematical Formula "Philosophical Transaction of Royal Society. 41, (97-269).
9. **Fries, J.F (1980). "Aging, Natural Death and the Compression of Morbidity "New England. Journal of Medicine. VOL.303 (3), (130– 135).**
10. Hamilton, Gregory, L. (2003) " Life Tables for Arkansas For 2000 by Race and Gender: Methodology and Construction " Demographic Research Institute for Economic Advancement university of Arkansas at Little Rock.

11. **Heligman, M.A. and Pollard, J.H. (1980) "The age pattern of Mortality". Philosophical Transaction of royal society. (107). (49 – 80).**
12. JACQUES, F. Carriere (1992) "Parametric models for Life tables" society of Actuaries.
13. JACQUES. F. Carriere (1994) " A Select and Ultimate Parametric Model " Transactions of Society of Actuaries. (VOL 46).
14. Jordan, C. W. (1975) "Life Contingencies" The Society of Actuaries, Chicago, USA.
15. Juck C. yue (2011) "Mortality Compression and Longevity Risk" Society of Actuaries.
16. Kannisto, V. (2001) "Mode and Dispersion of the Length of Life" Population, an English Section, VOL. 13 (159 – 171).
17. Nadinc Ouellette and Robert BourBeau (2011) "Changes in The age at death distribution in Four Law Mortality Countries. Non Parametric Approach" Demographic Research VOL 25 (19) (595 – 628)
18. Barkalov, N.B. (1988) "Interpolation of demographic data using rational split function" Demographic.
19. Purushotham, Marianna (2011) "Mortality Improvements: Analysis of the Past and Projection of the Future " The Actuary Magazine Vol. 8 (4), Society of Actuaries.
20. Elandt, R., Johnson and N. Johnson (1980) "Survival Models and data analysis" New torch. John Wiley.
21. Scollnik, DAVID P.M. (1995) "Simulating Random Varieties from Makeham" Distribution and from others with Exact or Nearly log-concave Densities "Tram Section of Society of Actuaries (VOL 46).
22. Thatcher, A Roger، Siu Cheung, Horiuch, chiro suad Robine. J (2010) "The Compression of death above The Mode" Demographic Research VOL 22 (17) (505 – 536)

23. Valdez, E., Purushotham, M. and Huijing. (2011) "Global Mortality Improvement Experience and projection Techniques" Society of Actuaries.
24. Vladimir, Romo Canudas. (2008) "The Modal age at death and The Shifting Mortality hypothesis" Demographic Research, VOL 19 (30), (1179 – 1209).
25. WillMoth, J.R. and Horiuchi, s (1999) "Rectangularisation Revisited variability of age of death with in Human population" Demography, VOL 36 (4), (475 – 495).
26. World Bonk, World development indicators, 2011.

ملحق رقم (1)

تقدير معالم الدالة المعدلة B, C

Estimate C

$$\mu_{\chi} = BC^{\chi}$$

$$\ln \mu_{\chi} = \ln B + \chi \ln c$$

$$\ln \mu_{\chi_{HL}} = \ln B + \chi_{HL} \ln c$$

$$\ln \mu_{\chi_{LL}} = \ln B + \chi_{LL} \ln c$$

$$\ln \mu_{\chi_{HL}} - \ln \mu_{\chi_{LL}} = \ln c \left(\chi_{HL} - \chi_{LL} \right)$$

$$\ln c = \frac{\ln \left(\frac{\mu_{\chi_{HL}}}{\mu_{\chi_{LL}}} \right)}{\left(\chi_{HL} - \chi_{LL} \right)}$$

$$\therefore c = exp \left[\frac{\ln \left(\frac{\mu_{\chi_{HL}}}{\mu_{\chi_{LL}}} \right)}{\left(\chi_{HL} - \chi_{LL} \right)} \right]$$

Estimate B

$$\mu_{\chi} = BC^{\chi}$$

$$\ln \mu_{\chi} = \ln B + \chi \ln c$$

$$\therefore \ln B = \ln \mu_{\chi} - \chi \ln c$$

$$\therefore B = exp \left[\ln \mu_{\chi} - \chi \ln c \right]$$

ملحق رقم (2)

البيانات المقدرة طبقا للدالة المعدلة لجدول 2010

X = 30, Lx =100000, B = 0.00089, C = 1.06769

age	μ_x	P_x	L_x	age	μ_x	P_x	L_x
30	0.00089	0.99911	100000	75	0.0257698	0.974230218	75195
31	0.0009502	0.999049754	99911	76	0.0281392	0.971860831	73257
32	0.0010146	0.998985429	99816	77	0.0307264	0.969273592	71196
33	0.0010832	0.998916751	99715	78	0.0335515	0.96644847	69008
34	0.0011566	0.998843423	99607	79	0.0366364	0.963363595	66693
35	0.0012349	0.998765132	99492	80	0.0400049	0.959995082	64249
36	0.0013185	0.998681541	99369	81	0.0436831	0.956316853	61679
37	0.0014077	0.998592291	99238	82	0.0476996	0.952300432	58985
38	0.001503	0.998497	99098	83	0.0520853	0.947914723	56171
39	0.0016047	0.998395258	98949	84	0.0568742	0.943125773	53246
40	0.0017134	0.99828663	98790	85	0.0621035	0.937896506	50217
41	0.0018294	0.998170648	98621	86	0.0678136	0.932186437	47099
42	0.0019532	0.998046814	98441	87	0.0740486	0.925951358	43905
43	0.0020854	0.997914599	98248	88	0.080857	0.919143	40654
44	0.0022266	0.997773433	98043	89	0.0882913	0.91170865	37366
45	0.0023773	0.997622712	97825	90	0.0964092	0.903590754	34067
46	0.0025382	0.997461787	97593	91	0.1052735	0.894726463	30783
47	0.00271	0.99728997	97345	92	0.1149529	0.885047149	27542
48	0.0028935	0.997106522	97081	93	0.1255221	0.874477877	24376
49	0.0030893	0.996910655	96800	94	0.1370632	0.862936819	21316
50	0.0032985	0.99670153	96501	95	0.1496654	0.850334626	18395
51	0.0035218	0.996478249	96183	96	0.1634263	0.836573731	15642
52	0.0037601	0.996239854	95844	97	0.1784524	0.821547599	13085
53	0.0040147	0.995985321	95484	98	0.1948601	0.805139898	10750
54	0.0042864	0.995713558	95100	99	0.2127764	0.787223601	8656
55	0.0045766	0.995423398	94693	100	0.23234	0.76766	6814
56	0.0048864	0.995113598	94259	101	0.2429157	0.757084292	5231
57	0.0052172	0.994782826	93799	102	0.2539728	0.746027196	3960
58	0.0055703	0.994429663	93309	103	0.2655332	0.734466801	2954
59	0.0059474	0.994052594	92790	104	0.2776198	0.722380196	2170
60	0.00635	0.99365	92238	105	0.2902566	0.709743431	1567
61	0.0070259	0.992974056	91652	106	0.3034685	0.696531462	1112
62	0.0077738	0.99222616	91008	107	0.3172819	0.682718108	775
63	0.0086013	0.991398652	90301	108	0.331724	0.668275995	529
64	0.0095169	0.990483058	89524	109	0.3468235	0.653176501	354
65	0.01053	0.98947	88672	110	0.3626103	0.637389705	231
66	0.0115336	0.988466415	87738	111	0.3791157	0.620884322	147
67	0.0126328	0.987367181	86726	112	0.3963724	0.603627644	91
68	0.0138368	0.986163183	85631	113	0.4144145	0.585585471	55
69	0.0151556	0.984844435	84446	114	0.4332779	0.56672205	32
70	0.0166	0.9834	83166	115	0.453	0.547	18
71	0.0181263	0.981873723	81785	116	0.4736198	0.526380237	10
72	0.0197929	0.980207113	80303	117	0.4951781	0.504821898	5
73	0.0216127	0.978387268	78714	118	0.5177177	0.482282262	3
74	0.0235999	0.976400098	77012	119	0.5412833	0.45871666	1
75	0.0257698	0.974230218	75195	120			